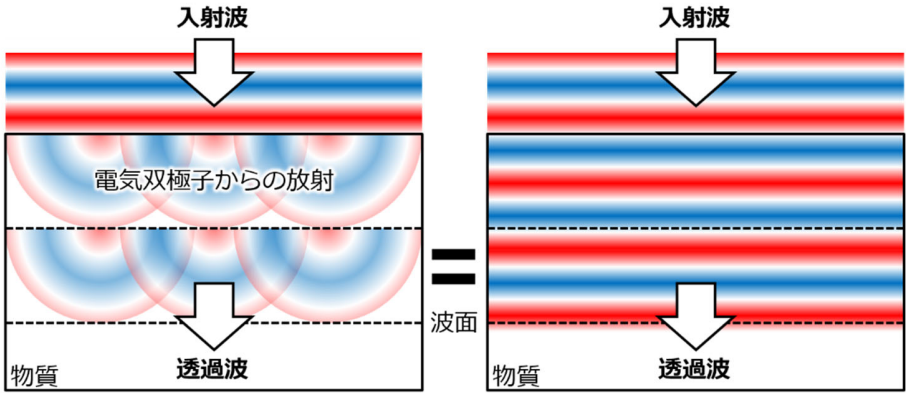
3　光の透過・反射・回折

光の透過や反射は、これまで議論した複素屈折率によって決定される。また、これらは光がもつ重要な自由度である偏光（p 偏光、s 偏光）に依存する。さらに、特別な条件で起こる透過・反射現象として、ブリュースター現象・全反射現象について学ぶ。

透過光・反射光の正体

本章では、物質界面に光を入射した時に起こる、透過・反射現象についてみていくが、そのまえに、そもそも「透過・反射」とは何か、その物理的実体について考えておこう。ここから先は、マクスウェル方程式や境界条件を使って、数学的な計算をこなしていくことでいろいろなことが明らかになっていくが、結局何が起きているのか？という点をおさえておくことは非常に重要で、計算結果をより深く理解することに繋がる。

これまで勉強してきたように、物質に光を入射すると光電場により分極が誘起される。分極がもつ双極子モーメントは、受け取ったエネルギーを再び光として放射する。つまり、物質に光を入射したときに現れる光の空間分布は、入射光と分極からの放射の和になる。簡単のためにまず、入射光と同じ方向の放射のみを考えよう。図に示すように、入射光によって励振された分極からの放射が各点から球面波を放射する。分極の起源となっている電子分極などは、波長に比べ十分小さく、密に分布しているため、多くの点から放出された球面波の重ね合わせは平面波と見做せる。これはいわゆるホイヘンスの原理と同じ状況になっていることを意味しており、入射光と放射光のそれぞれの平面波が重なったものが、「透過波」である。一方、入射光とは逆の方向に向かう放射波も発生しており、これが「反射波」である。このように、結局のところ、透過、反射というのは、単に波の重ね合わせであって、入射波の一部（場合によっては全部）が、放射波に変換された結果生じる現象である。



光の屈折（スネルの法則）

光が物質の界面に斜めに入射すると、光の「屈折」がおき、進行方向が変化する。これをホイヘンスの原理（波面による考え方）で理解しよう。下図のように、上方からやってきた波面が A 地点で界面にぶつかる。さらに時間を進めると、A 地点から下方向に向かう波面の速度は、屈折率分だけ遅くなるので、波面の連続性を保ったまま線を引けば、線分 CD のように、上の空間と異なる傾きをもった波面になる。ここで、ホイヘンスの原理における「素元波」は、これまで学んできたように、物質中で誘起された分極からの放射である。ここで幾何学的な条件から屈折（スネル）の法則を導いてみよう。△ABD と△DCA は線分 AD を共有する直角三角形なので

$$\frac{1}{\mathrm{AD}} = \frac{\sin\theta_\mathrm{i}}{\mathrm{DB}} = \frac{\sin\theta_\mathrm{t}}{\mathrm{AC}}$$

が成り立つ。また、波面が A→C に進むまでの時間と B→D に進むまでの時間は等しいので、「距離÷速さ」から

$$\frac{\mathrm{DB}}{c/n_\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{AC}}{c/n_\mathrm{t}} \leftrightarrow \frac{1/n_\mathrm{i}}{\mathrm{DB}} = \frac{1/n_\mathrm{t}}{\mathrm{AC}}$$

二つの式を連立すると

$$\frac{\sin\theta_\mathrm{i}}{1/n_\mathrm{i}} = \frac{\sin\theta_\mathrm{t}}{1/n_\mathrm{t}} \leftrightarrow n_\mathrm{i}\sin\theta_\mathrm{i} = n_\mathrm{t}\sin\theta_\mathrm{t} \leftrightarrow \frac{\sin\theta_\mathrm{i}}{\sin\theta_\mathrm{t}} = \frac{n_\mathrm{t}}{n_\mathrm{i}}$$

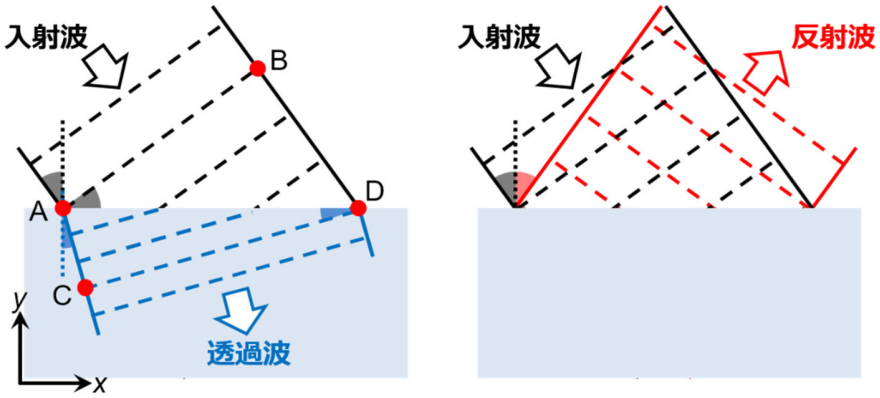
となり、よく知られたスネルの法則が導かれる。

ちなみに、まったく同じ考え方で、反射の法則

$$\theta_\mathrm{i} = \theta_\mathrm{t}$$

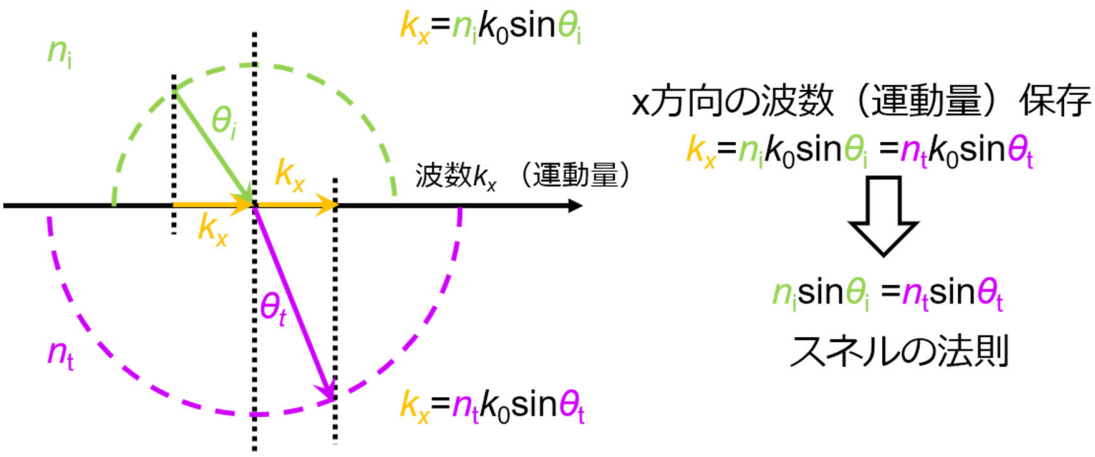
も導ける。

スネルの法則は、複素屈折率に対しても成り立ち、その場合に角度は複素数になる。後に出てくる、フレネル係数の計算等では、この複素数の角度を使って計算を進めることができる。（「複素数の屈折角」の物理的な意味については佐藤勝昭先生の物性なんでもＱ＆Ａ
http://home.sato-gallery.com/research/crystal_letters_nandemoQA(2).pdf
の「斜め入射の反射における複素数の屈折角」という項目でわかりやすく説明されています）



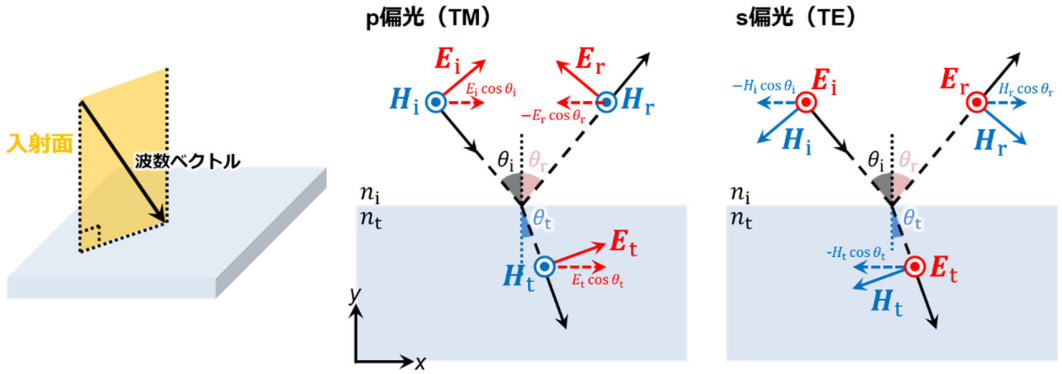
ここまでは波面を考えることでスネルの法則を導出していたが、これは波数を用いて（運動量の保存として）理解することもできる（波面の連続性と波数の保存は物理的には全く同じことを異なる言葉で記述しているだけ）。先ほどと同様の状況で下の図のようにx方向の波数成分k_xを考える。この界面においてx方向には並進対称性（x方向に進んでも景色が変わらない）があるのでx方向の運動量（つまりk_x）の保存が要請される。そこでそれぞれの媒質における光のk_x成分が等しいとして立式すると下図のようにスネルの法則が導かれる。

PhC結晶に真横から光を入れる場合も、同様に界面方向の波数保存が適用される。PhCの場合は、等周波数面（下図の点線の半円に相当する）が複雑になるため、通常の物質ではおこらないような様々な屈折現象が起こる。



偏光（p 偏光・s 偏光）とフレネル方程式

ある界面に光が斜め入射する場合、その光をふたつの偏光成分にわけて考えることができる。そのふたつの偏光を、p 偏光（p-polarization）、s 偏光（s-polarization）と呼ぶ。これらの偏光を定義するには「入射面（plane of incidence）」を理解する必要がある。入射面とは「界面に垂直で、入射する光の波数ベクトルを含むような面」である。言葉より図がわかりやすいので、そちらをみてもらいたい。



入射光の電場が、入射面に平行（入射面内にある）な偏光を p 偏光と言う（parallel 偏光と覚えよう）。一方、入射面に垂直な偏光を s 偏光と呼ぶ（不幸にも、垂直の英語が perpendicular と p から始まってしまうため、senkrecht（ドイツ語で垂直）の頭文字をとったらしい）。ちなみに p 偏光は TM（transverse magnetic）偏光、s 偏光はＴＥ（transverse electric）偏光と呼ばれることもよくある。こちらの定義は、入射面に対して、電場と磁場のどちらが横切っている（transverse）かで分類しており、実はこちらの方が覚えやすい。ち

なみに、一様な界面に対して完全に垂直に光が入射される場合は、入射面を定義できないため、そもそも p とか s とかに分類できない（意味がない）。

一般の偏光は、p 偏光と s 偏光と足し算で表現される。何もない空間であれば、偏光を表現するのに、（1 次独立なら）どのような基底をとってもいいわけだが、ここで p とか s とかに分けたのは、もちろん界面があるからである。界面での透過や反射が、p 偏光成分と s 偏光成分で異なるため、このような分け方をしておくと、一般の偏光を界面に入射したときの透過・反射を、s 偏光と p 偏光のそれぞれに対する透過・反射の足し合わせで計算できる。

さてここからは、それぞれの偏光の光を界面に入射したときの、透過率および反射率を求めいこう。まずは p 偏光から考えていく。そのためには、界面における電磁場の接続条件を考える。マクスウェル方程式から導かれる自然な境界条件というやつによれば、「界面において、界面方向の電場と磁場はそれぞれ等しくなければならない」ので以下の式が立てられる。

$$E_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} - E_\mathrm{r}\cos\theta_\mathrm{r} = E_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{t}$$
$$H_\mathrm{i} + H_\mathrm{r} = H_\mathrm{t}$$

ここで、マクスウェル方程式から導くことができる

$$E = cB$$

の関係を思い出そう。上の式は真空中の平面波に対して成り立つ式であるが、屈折率nの媒質中では速さが屈折率分の一だけおそくなるので

$$E = \frac{c}{n}B$$

となる、つまり磁場を屈折率と電場で書くことができて（ここで透磁率が 1 であることを仮定しています）

$$E_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} - E_\mathrm{r}\cos\theta_\mathrm{r} = E_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{t}$$
$$n_\mathrm{i}E_\mathrm{i} + n_\mathrm{i}E_\mathrm{r} = n_\mathrm{t}E_\mathrm{t}$$

となる。この式を連立すると

$$\tilde{r} \equiv \frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{i}} = \frac{n_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{i} - n_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{t}}{n_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{i} + n_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{t}}$$
$$\tilde{t} \equiv \frac{E_\mathrm{t}}{E_\mathrm{i}} = \frac{2n_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i}}{n_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{i} + n_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{t}}$$

となり、振幅反射係数$\tilde{r}$（amplitude reflection coefficient）と振幅透過係数$\tilde{t}$（amplitude transmission coefficient）が求められる。

全く同じような流れで、s 偏光の場合もみていこう。境界条件から、

$$-n_\mathrm{i}E_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} + n_\mathrm{i}E_\mathrm{r}\cos\theta_\mathrm{r} = -n_\mathrm{t}E_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{t}$$
$$E_\mathrm{i} + E_\mathrm{r} = E_\mathrm{t}$$

が成り立ち、これらを用いて

$$\tilde{r} \equiv \frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{i}} = \frac{n_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} - n_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{t}}{n_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} + n_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{t}}$$
$$\tilde{t} \equiv \frac{E_\mathrm{t}}{E_\mathrm{i}} = \frac{2n_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i}}{n_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} + n_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{t}}$$

が導かれる。p 偏光の時とよく似ているが、屈折率の添え字が変わっている。

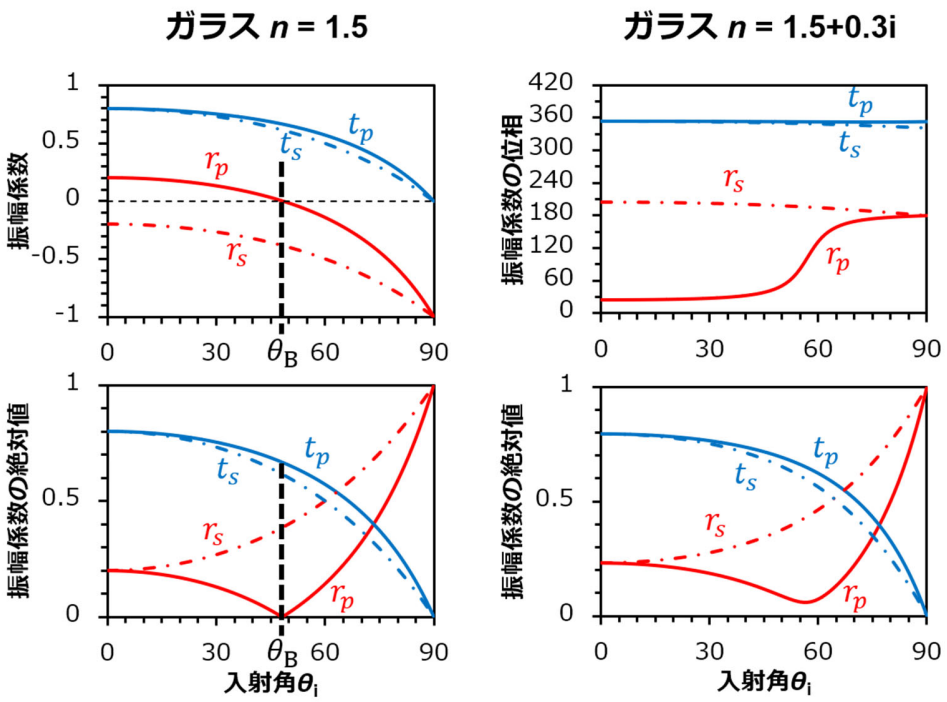
ここまでの結果をまとめておこう。

$$\widetilde{r_\mathrm{p}} = \frac{n\cos\theta_\mathrm{i} - \cos\theta_\mathrm{t}}{n\cos\theta_\mathrm{i} + \cos\theta_\mathrm{t}}$$
$$\widetilde{t_\mathrm{p}} = \frac{2\cos\theta_\mathrm{i}}{n\cos\theta_\mathrm{i} + \cos\theta_\mathrm{t}}$$
$$\widetilde{r_\mathrm{s}} = \frac{\cos\theta_\mathrm{i} - n\cos\theta_\mathrm{t}}{\cos\theta_\mathrm{i} + n\cos\theta_\mathrm{t}}$$
$$\widetilde{t_\mathrm{s}} = \frac{2\cos\theta_\mathrm{i}}{\cos\theta_\mathrm{i} + n\cos\theta_\mathrm{t}}$$

ここで、

$$n \equiv \frac{n_\mathrm{t}}{n_\mathrm{i}}$$

とおいた。これら４つの振幅反射 or 透過係数は、フレネル方程式（Fresnel equations）やフレネル係数(Fresnel coefficients)と言う名前で知られている。これらの量は、屈折率が複素数の場合も成り立ち、一般に複素数になる量である。「振幅」という接頭辞は、この後に出てくる「強度」反射率・透過率と区別するためにつけられる。



図左側は、空気（屈折率 1）からガラス（屈折率 1.5 とした）へ入射したときの、フレネル係数をプロットしたものである。r_pは角度が浅いところでは正の値だが、６０度付近を境に負になり、その後 90 度で-1 になる。r_sは、常に負の値を取っており、90 度ではr_pと同様に-1 になる。ここで、負の値は、反射時に位相が 180 度逆転（逆位相）することを意味している。これは、いわゆる「固定端」反射の状況に相当する。逆に位相が変化しない（位相変化０度）は「自由端」反射である。電磁波における固定端・自由端の物理的解釈は結構むずかしい。というのも、結局境界条件を満たすためにはそうなってなくてはならない、という感じだからだ。（境界条件とエネルギーの保存を満たすために、自由端か固定端かが選ばれる、という感じのようだ。参考資料：https://photo-cross.com/blog/diffractive-optical-element/blog-552/）

振幅係数は、一般に複素数なので、極座標表示すると

$$\tilde{r} = |r|\exp(\mathrm{i}\phi_\mathrm{r}), \tilde{t} = |t|\exp(\mathrm{i}\phi_\mathrm{t})$$

のように振幅と位相にわけることができ、このほうが物理的にはわかりやすい。振幅部分は、電場の振幅がどれくらい小さくなるかを意味し、位相部分は、界面でどのくらい位相が変化するかを表している。

ちなみに、r_{p}で符号が正から負になる（振幅がゼロになる）ところは、後に紹介するブリュースター角に相当する。このブリュースター角はｐ偏光のみにしか現れていないが、その理由は後に明かされる。

振幅係数の絶対値は、入射電場に対する、透過・反射電場の振幅比を表している。90 度で、反射率が１、透過率がゼロ（完全反射）になっているが、これは界面に完全に平行な方向に進む光に相当しているため、そもそも今考えている状況に合致しない。そういった意味であまり意味はないが、今考えたセットアップでは、全ての光が空気側にいるままで、ガラス側に伝搬しないということを表現している。

図右側は、ガラスの屈折率を複素数 1.5+0.3i にしたときのフレネル係数の絶対値と位相である。虚部がない場合との大きな違いとしては、位相変化が 0 と 180 以外の連続的な値をとることと、ブリュースター角が消滅していることが挙げられる。

図に置いて、$\theta_{\mathrm{i}} = 0$では、ｓ、ｐ偏光という区別はできないにもかかわらず、$r_{\mathrm{p}}(\theta_{\mathrm{i}} = 0) = -r_{\mathrm{s}}(\theta_{\mathrm{i}} = 0)$となっており、両者は一致していない（符号が反転している）。この非物理的な矛盾は、光の電磁場ベクトルの向きの定義によって発生している。フレネル係数を求める際に使った、反射・透過波の電磁場ベクトルの向きは、実は自由にとることができて、この定義の仕方により、符号の反転が生じる。もう少し具体的に言うと、ｐ偏光では入射面に垂直な磁場ベクトルの向きが不変であるような座標の取り方をした。一方、ｓ偏光では入射面に垂直な電場ベクトルの向きが不変であるような座標の定義を用いている。実際に、ｓ偏光の定義において、θ_{i}を０に近づけていくと、入射と反射の電場の向きは一致するが、ｐ偏光では反対の向きを向くことがわかる。これにより、符号の非物理的な反転が起きている。

透過係数と反射係数の満たす関係

ここで、本筋とは異なるが、フレネル方程式の透過・反射係数が満たす、いくつかの関係について述べる。ここでは、これまでと同様に二つの媒質（媒質n_iと媒質n_t）の界面を考え、$n_i \to n_t$に光が進むときの係数をそれぞれt, r、逆に$n_t \to n_i$の係数をそれぞれt', r'とする。この時以下のような関係がある。

（1）透過係数と反射係数の関係

$$1 + r = t$$

これは、どのような媒質同士の界面でも成り立つ関係で、一見エネルギー保存の式に似ているが、符号が+になっていることに注意しよう。複素振幅係数の場合は、少し直感とは異なるこの関係が成り立っている。この関係は、 s 偏光の場合の

$$E_{\mathrm{i}} + E_{\mathrm{r}} = E_{\mathrm{t}}$$

の式について、両辺をE_{i}でわれば簡単に導ける。ただし、p 偏光の場合には導けないこともすぐにわかる。p 偏光の場合は、「磁場」の比を用いて、透過・反射係数を定義すると、$1 + r = t$が導ける。垂直入射では、s,p の区別はないので常にこの関係が成立しているが、透過・反射前後で符号が反転しないように定義した場で、透過・反射係数が定義されていなければならないことに注意しよう。つまり、 p 偏光で使った電磁場の向きの定義を用いる場合は、係数を磁場の比として定義している必要がある。 s 偏光で使った電磁場の向きの定義を用いる場合は、係数を電場の比として定義している必要がある。（一般に、フレネルの式と呼ぶときは、電場の比で定義するようだ）

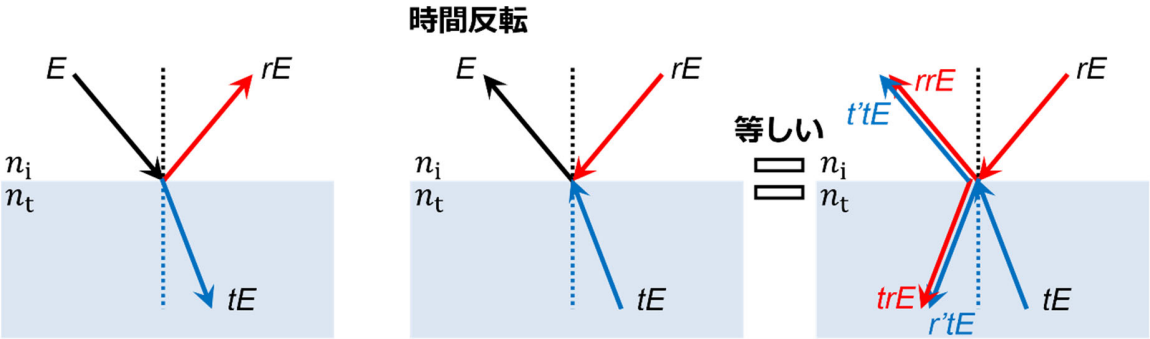
（2）ストークスの関係式（Stokes relation）

$$tt' + r^2 = 1$$
$$r = -r'$$

はストークスの関係式と呼ばれる、両サイドからの透過・反射係数を結びつける関係式である。この関係は、図のように媒質１から２への入射の時間反転を考えると導くことができる。時間反転では単に矢印が逆になっているが、冷静に考えると、二つの入射場はそれぞれ界面で透過・反射されているはずである。それらの透過・反射波が足し合わさった結果は、時間反転の時と同じでなければならないから

$$t'tE + r^2E = E$$
$$r'tE + rtE = 0$$

となり、ここから先ほどの関係式が導ける。系に吸収があると、時間反転前後の系が一致しなくなるので、この関係は損失のない物質同士の界面でのみ成り立つ。



反射率と透過率

ここまでは、振幅反射・透過係数を調べてきたが、これはあくまで電磁場の振幅比であり、強度比（エネルギー）ではない。一方、実際に我々がよく観測するのは光の強度であり、ここでそれを求めておこう。まず、簡単に書ける強度反射率R（単に反射率と呼ぶ）の方から紹介すると

$$R = |r|^2$$

と書ける。振幅の二乗が強度になっているので直感的にもわかりやすい。

ここで、空気と材料界面での反射率をざっくりと求められる便利な式を紹介しておこう。反射振幅の式に$\theta_\mathrm{i} = 0$（垂直入射）と空気の屈折率 1 を入れると

$$R = \left|\frac{n_\mathrm{t} - 1}{n_\mathrm{t} + 1}\right|^2$$

のように簡単な式で、反射率を求めることができる。例えば、ガラスの屈折率として$n_\mathrm{t} = 1.5$を入れてみると、

$$R = \left|\frac{1.5 - 1}{1.5 + 1}\right|^2 = \left|\frac{0.5}{2.5}\right|^2 = 0.2^2 = 0.04 \rightarrow 4\%$$

となり、空気／ガラス界面では、4%ほどの反射することがわかる。ガラスの裏面反射も加えれば、合計としてだいたい 8%になる。ガラスに映った自分の姿は、約 8%くらいの反射によって観察されるのだ。また、シリコンの屈折率$n_\mathrm{t} = 3.48$（波長 1.5 μm 付近）を用いれば

$$R = \left|\frac{3.48 - 1}{3.48 + 1}\right|^2 = \left|\frac{2.48}{4.48}\right|^2 = 0.55^2 = 0.3 \rightarrow 30\%$$

となり、裏面も含めれば 60%近い反射率になる。

透過率の方は少し、ややこしい。なぜかというと、電磁場のエネルギーは、媒質の屈折率（誘電率、透磁率）に依存するからだ。具体的には、強度Iは

$$I = n|E|^2$$

という関係がある。さらに、この表式は、実は「エネルギー密度」を表しているため、透過（屈折）時に角度が変わった影響（断面積）を考慮しなければならない。結局、強度透過率（単に透過率と呼ぶ）は

$$T = \frac{n_\mathrm{t}}{n_\mathrm{i}}\frac{\cos\theta_\mathrm{t}}{\cos\theta_\mathrm{i}}|t|^2$$

と書ける。ここで一つ目の因子が媒質の屈折率の違いを考慮したものであり、二つ目の因子が断面積を考慮したものである。これらの反射率・透過率から、媒質に吸収（屈折率虚部）がない場合に、$R + T = 1$となって、エネルギー保存を満たしていることが導ける。

ちなみに、現実の実験では、測定試料の入射側と透過側は最終的に空気になることが多いので、実は透過率を計算する際に必要な各因子の補正はあまり考える機会はない。一方で、シミュレーションや理論解析では、基板を半無限として計算することがあるので、その場合は常識を使って屈折率と角度の補正をして算出する必要がある。

ここで述べた透過・反射率の式は、s、p のどちらの偏光でも使える式である。したがって、一般の偏光に対する透過・反射率は、上記の各偏光に対する透過・反射率の線形結合で書かれる。

ストークスの関係式で紹介したように、吸収がない場合には$r = -r'$が成り立つので、$R = |r|^2 = |r'|^2 = R'$となり、どちらから入射しても反射率は変わらない。一方で、試料に吸収がある場合、この関係は成り立たないので、反射率は入射する向き（試料の表裏のどちらから入射するか）によって変化する。一方、透過率については、たとえ試料に吸収があったとしても$T = T'$の関係が成り立つ。これは相反性（reciprocity）と呼ばれ、時間反転対称な系で成り立つ性質である。（ファラデー効果のように磁場をかけた系は時間反転対称性がないため、相反性がないので、$T \neq T'$となってもよい）

インピーダンス

ここまでフレネルの公式を用いた透過・反射についてみてきたが、実はフレネルの式は、透磁率μが 1 になるような非磁性の材料のみを考えていた。そこでここでは、透磁率が 1 から異なる磁性体を含む一般の場合について考えてみよう。特に、垂直入射での反射率がどのような式であらわされるかを見てみる。

垂直入射の場合（ p 偏光での電磁場の向きの定義では）界面における条件式は

$$E_\mathrm{i} - E_\mathrm{r} = E_\mathrm{t}$$
$$H_\mathrm{i} + H_\mathrm{r} = H_\mathrm{t}$$

となる。フレネルの式ではここで、

$$E = \frac{c}{n}B = \frac{c}{n}\mu H = \frac{c}{n}H$$

を用いて磁場を電場に置き換えた。ここでは透磁率を残したまま計算してみよう。すると

$$E_\mathrm{i} - E_\mathrm{r} = E_\mathrm{t}$$
$$\frac{n_\mathrm{i}}{\mu_i}E_\mathrm{i} + \frac{n_\mathrm{i}}{\mu_i}E_\mathrm{r} = \frac{n_\mathrm{t}}{\mu_t}E_\mathrm{t}$$

となる。ここで$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$と書けることを思い出すと

$$\frac{n_i}{\mu_i} = \frac{\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}}{\mu_i} = \sqrt{\varepsilon_i/\mu_i} \equiv Z_i$$

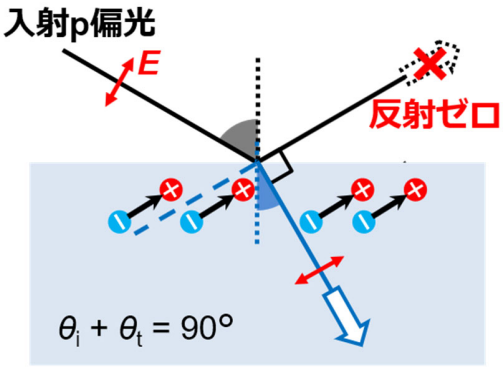
ここでZ_iはインピーダンスと呼ばれる。最終的に反射率は

$$R = \left|\frac{Z_t - Z_i}{Z_t + Z_i}\right|^2$$

となり、インピーダンスのみで書くことができる。このように、インピーダンスは界面での反射を特徴づける量である。したがって、実は二つの材料の「屈折率」が異なっていても、「インピーダンス」が一致していれば、反射は起こらない。このように界面における二つの材料のインピーダンスが一致することを「インピーダンスマッチ」、またそのような状況を実現することを「インピーダンスマッチングをとる」などと言う。反射の低減は、工業的に様々な場面で重要であるため、インピーダンスマッチングの考え方は重要である。ちなみに、この概念は電気回路でも同様の意味で登場する。

ブリュースター角

フレネル係数のところで少し触れたように、 p 偏光では、反射率がゼロ（透過率が 100%）になるブリュースター角（Brewster angle, 偏光角とも呼ばれる）と呼ばれる入射角がある。ブリュースター角では図のように、誘起される分極の向きが、反射光がの向きと完全に一致している。分極を形成する電気双極子は、その軸方向には光を放射しないことを思い出せば、双極子からの再放射である反射波がゼロになることが容易に理解できる。このように、誘起される分極の方向が「面内」にある場合のみに、ブリュースター現象は起こるので、（光学領域では）、p 偏光でしかブリュースター角は存在しない。もちろん、磁気応答のあるような周波数領域では、 s 偏光でもブリュースター角が存在し得る。また、フレネル方程式のところで見たように、材料に吸収（屈折率の虚部）がある場合、完全に反射がゼロになる角度は消えてしまうが、それでも反射は非常に低い。この角度を「疑ブリュースター角」と呼ぶことがある。



ブリュースター角の、具体的な表式を見ていこう。図から、幾何学的な関係として

$$\theta_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{t}} = 90°$$

になっていることがわかる。屈折（スネル）の法則と上式を用いると、ブリュースター角θ_{B}は

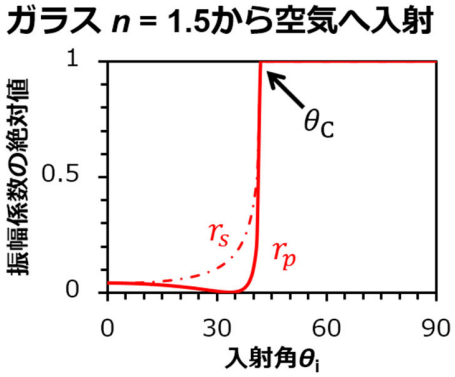
$$\tan\theta_{\mathrm{B}} = \frac{n_{\mathrm{t}}}{n_{\mathrm{i}}}$$

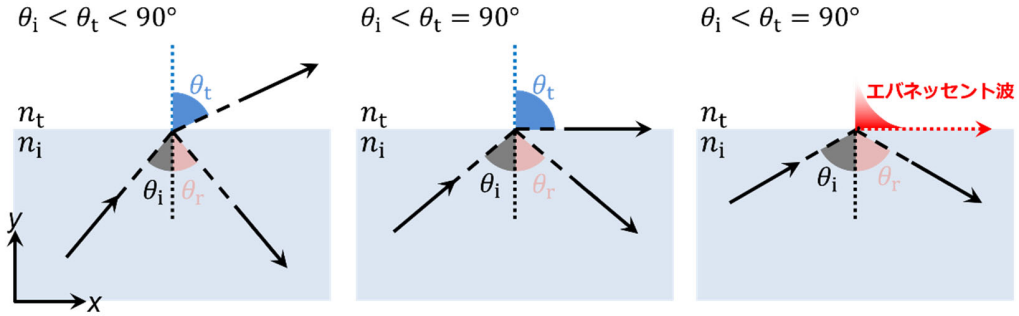
のから計算できる。これは、ブリュースターの法則と呼ばれる。

全反射とエバネッセント波

ここまでの透過・反射の議論では、実は常に、$n_{\mathrm{i}} < n_{\mathrm{t}}$の状況を考えてきた。つまり、空気から何らかの材料に入射するような状況だ。逆に、ガラスのような透明材料から空気に入射するような、$n_{\mathrm{i}} > n_{\mathrm{t}}$となる場合、「全反射（Total reflection）」と呼ばれる現象が起こる。フレネル方程式自体は、屈折率の大小関係に関係なく計算したのもであったので、全反射が起きる場合について、実際に反射率を計算すると図のようになる。確かに、臨界角θ_{C}よりも大きな入射角で、反射率が 1（全反射）になっていることがわかる。注意してほしいのは、全反射は「偏光に関係なく」出現するという点だ。この現象を理解するには、やはり図で考えよう。図のように、入射角を徐々に大きくしていくと、どこかで屈折角がちょうど 90°になる。もちろんこれは、$n_{\mathrm{i}} > n_{\mathrm{t}}$により$\theta_{\mathrm{i}} > \theta_{\mathrm{t}}$が成り立っているからである。屈折角がちょうど 90°になる入射角が臨界角であり、それ以上の入射角で全反射が起きる。では、なくなってしまった反射はどこに行ってしまったのだろうか。実はまったくなくなってしまったわけではなく、「エバネッセント波（evanescent wave）」と呼ばれる指数関数的に減衰する波として存在している。空間的に振動し伝搬していく波を「実数」の波と呼べば、エバネッセント波は、いわば「虚数」の波と言ったところだ。エバネッセント波は、伝搬方向の波数が虚数になっているため、進行方向にエネルギーを運ばないが、電磁場として確かに透過側の媒質に存在している。自由空間の波は、遠くまで伝わるため「遠方場（far field）」と呼ばれるのに対して、エバネッセント波は指数的に減衰することから「近接場（near field）」と呼ばれる。

エバネッセント　重要　一般に波は複素数　過減衰　over dump

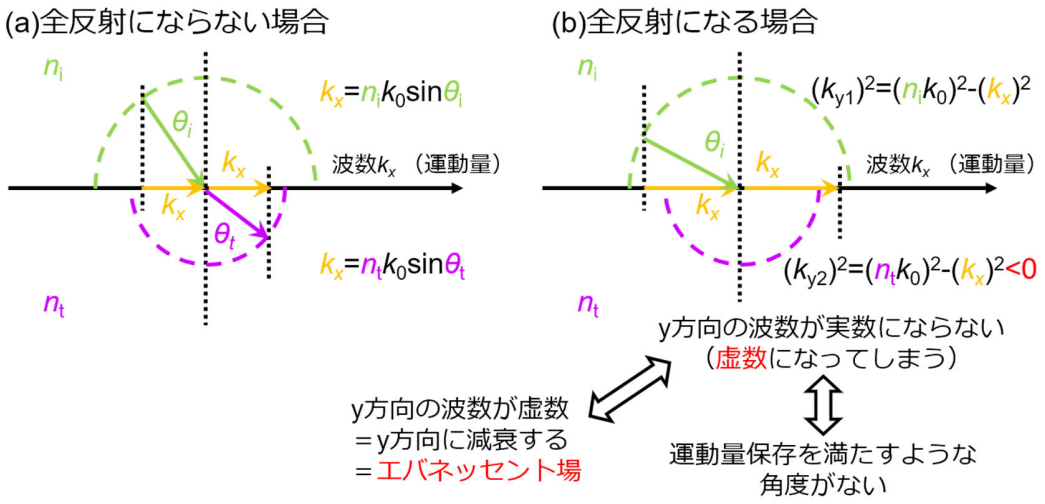




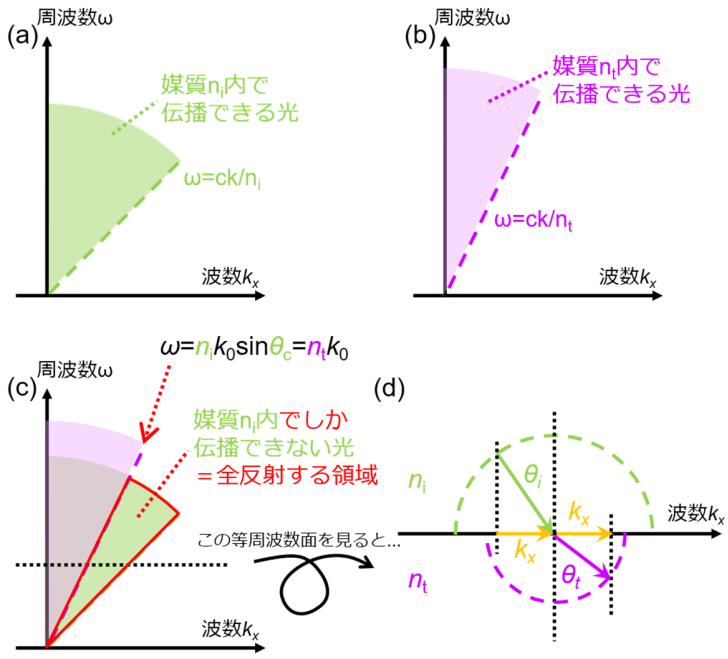
全反射現象の最も身近な応用例は、光ファイバではないだろうか。これまでの人生のどこかで、「クラッド」で覆われた「コア」内を光が反射しながら進んでいくイラストを見たことがあると思う。ここまでの議論から、クラッドとコアの屈折率の設計が重要であることが分かってもらえると思う。

ブリュースター現象はｐ偏光のみで起こる現象であったが、全反射現象は偏光に依存しない。ここでは、全反射現象も、スネルの法則と同様に、運動量（波数）の保存から理解できることを見ていこう。前提として、全反射が起こるためには、$n_\mathrm{i} > n_\mathrm{t}$である必要がある。その場合、それぞれの媒質で取り得る波数の大きさを表す半円は下図のようになる。屈折率の大小を反映して、円の半径が決まっている。ここで図(a)のような臨界角よりも小さな入射角の場合は、通常の屈折が起こる。一方、図(b)のように、臨界角を超えた大きな入射角の場合、x方向の波数保存を満たせるような「交点」が紫の半円上にないことがわかる。そのため、光は下の媒質に進入できず、全てが反射される。また、この時、実はy方向の波数が「虚数」になっている。これは、各媒質における波数が$nk_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$を満たしていることを念頭に、$k_x$の保存を考えると理解できる。図(b)にあるように、下の媒質ではk_y^2が負になるため、k_yは虚数になってしまう。ここで波数の虚部が、減衰を表していることを思い出すと、下の媒質側では、y方向に

減衰する波が形成されることがわかる。これがまさに、エバネッセント波である。ちなみに、エバネッセント「場」（evanescent field）という呼び方もあり、大きな意味の違いはないが、「場」はより一般的な呼び方としてよく用いられている気がする。

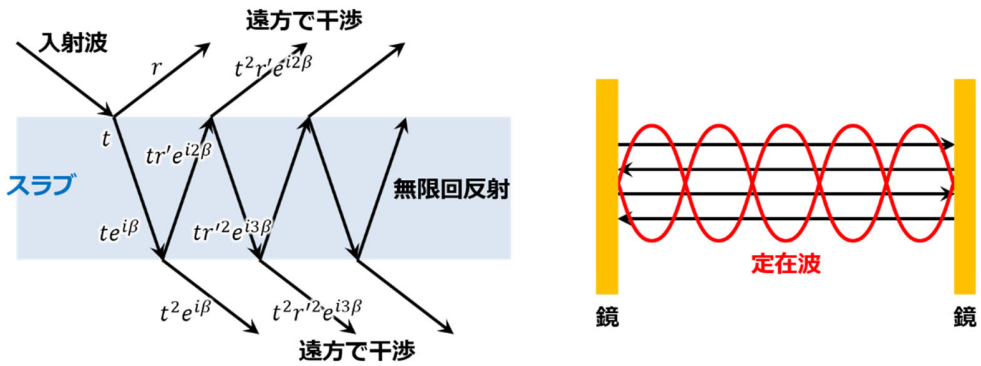


さらに、全反射を分散関係の図で考えてみよう。上下の媒質間で伝搬する光は、下図(a)、(b)において塗りつぶされた領域のどこかに対応する。ここで、屈折率が大きいほど、ライトラインの傾きは小さくなる。これらを重ねた図(c)を考えると、上側の媒質n_i中でしか伝搬できない領域があることがわかる。この領域の光は界面で全反射される。実際この重なり合う領域が始まる角度、臨界角θ_Cは上の媒質n_iにおける分散関係$n_ik_0\sin\theta_C$がn_tk_0と一致する条件であり、計算すると先に述べた臨界角の条件と一致することが分かる。また図(c)の適当な周波数で切り取った等周波数面が、これまで使ってきた半円の図に対応する（図(d)）。



光の干渉と光共振器

光の反射によっておこる現象は多岐に渡るが、そのひとつが薄膜干渉である。ここまでは、二つの媒質の界面を考えたが、ガラスやシリコンの基板（スラブと呼んだりする）のように、上下が空気で挟まれた 3 層構造を考えると、反射点（反射が起こりうる界面）がふたつあるために、光は基板内を何度も行き来することができる。光は界面に到達するたびに、フレネル係数によって決められる透過率と反射率で分岐され、それを無限回繰り返す。その帰結としてスラブから出ていく無限個の光は遠方で干渉しあい、光の波長に応じて強め合ったり弱め合ったりする。このような干渉現象をファブリ・ペロー干渉（Fabry-Perot interference）と呼び、スラブの場合以外にも、2 つの反射点によって生じる光の干渉の場合にこの名前が用いられる。そのため、図のスラブや一対の鏡からなる構造をファブリ・ペロー干渉計（または、ファブリ・ペロー共振器）と呼ぶ。



ここでは我々がよく遭遇する「空気（n=1）／シリコン（n=3.48）／空気」の 3 層系について見ておこう。簡単のため、ここでは垂直入射を考えることにする。図のように、3 層系ではふたつの界面があり、それぞれの界面で透過係数、反射係数がかかる。また、スラブ内を伝搬するときにはその距離に応じた位相変化$\beta = kd$がある。ここで、kは波数、dはスラブの厚さである。この系における反射係数は、級数を使って

$$
\begin{aligned}
r_{\mathrm{total}} &= r + t^2r'e^{i2\beta} + t^2rr'^2e^{i4\beta} + t^2r^2r'^3e^{i6\beta} + \cdots \\
&= r + t^2r'e^{i2\beta} + t^2r'e^{i2\beta} \times rr'e^{i2\beta} + t^2r'e^{i2\beta} \times \left(rr'e^{i2\beta}\right)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

と書ける。各界面での透過係数を$t = t_{\mathrm{Air\to Si}} = t_{\mathrm{Si\to Air}}$、反射係数を$r = r_{\mathrm{Air\to Si}}$, $r' = r_{\mathrm{Si\to Air}}$と置いた。無限級数の公式を用いれば、

$$
r_{\mathrm{total}} = r + \frac{t^2r'e^{i2\beta}}{1 - rr'e^{i2\beta}}
$$

となる。フレネル係数のもつ関係式を用いると、最終的に

$$
r_{\mathrm{total}} = \frac{r\left(1 - e^{i2\beta}\right)}{1 + r^2e^{i2\beta}}
$$

となって、よく教科書に載っている形の式になる。同様にして透過も計算すると、

$$
t_{\mathrm{total}} = \frac{t^2e^{i\beta}}{1 + r^2e^{i2\beta}}
$$

となる。

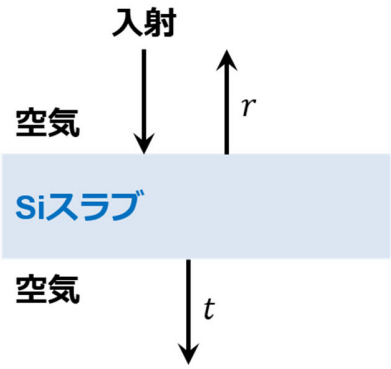
図は、上記の式から計算した透過率および反射率のスペクトルである。ここで、スラブ厚さは 2 μm に設定した。スペクトルを見ると周期的な干渉縞があることがわかる。これをリップル（ファブリ・ペローリップル）などと呼ぶ。（このリップルは、$2\beta = 2kd = 2\pi m$毎に現れる）実際の実験でもこのような干渉縞はよく観測され、この干渉縞から、逆にd（反射点間の距離）を求めることができる。例えば、透過率が大きくなっている波長を見ると、左から、1.39、1.545、1.74 である。例えば、λ=1.39 μm で$2kd = 2\pi m$（mは整数）が満たされていたとすると、隣あうリップルは整数が一つ異なるので

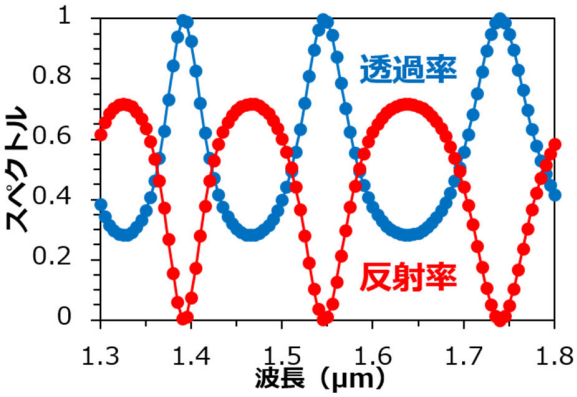
$$2kd = 2 \times 3.48 \times \frac{2\pi}{1.39\ (\mu\mathrm{m})} d = 2\pi m$$
$$2 \times 3.48 \times \frac{2\pi}{1.545\ (\mu\mathrm{m})} d = 2\pi(m-1)$$
$$2 \times 3.48 \times \frac{2\pi}{1.74\ (\mu\mathrm{m})} d = 2\pi(m-2)$$

これらの式を足し引きすることで、dを求められる。例えば、上ふたつを用いると、

$$2 \times 3.48 \times d \left\{ \frac{1}{1.39\ (\mu\mathrm{m})} - \frac{1}{1.545\ (\mu\mathrm{m})} \right\} = m - (m-1) = 1 \leftrightarrow d \sim 2\ (\mu\mathrm{m})$$

と、確かに設定した値と一致する。ここまで単純な 3 層系を考えたが、重要なのは、フレネル方程式を用いることであらゆる多層膜系の計算が原理的に可能ということである。（一般の多層膜における計算方法は「分光エリプソメトリ」の 2.4 節に記述があるので一度読んでみてほしい。）





干渉現象は、特にフォトニック結晶を理解する上で肝となる。というか、フォトニック結晶は基本的に、反射（回折）された光同士がどのように干渉しあうのか、という問題をひたすら解いている、と言ってもよい。多層膜における干渉は、1 次元フォトニック結晶の物理そのものである。干渉は、光を含む「波」に特徴的な現象であり、「干渉を制する者は波を制する」と心得たいところだ。

対面した一対の鏡からなるファブリ・ペロー共振器は、レーザにもよく用いられる、もっとも代表的な光共振器である。鏡の間を光が何度も往復することで定在波が形成され、その中に利得媒質を置きポンプ（エネルギーを注入）すれば、レーザを構成することができる。ナノフォトニクスでは、このような通常の鏡を用いなくても、定常波状態を作り出せるため、非常に小さな光共振器を実現することができる。

ここで光共振器の性能を表す Q 値（Quality factor, Q-factor）について触れておこう。Q 値は、もともと光以外にも、何らかの振動子に対して用いられる概念である。色々な説明の仕方があるのだが、ここでは、Q 値の最も基本的な定義から始めよう。Q 値が定義できるような振動子（共振器）は、光共振器で見たように、エネルギーをその共振器内にとどめておくという機能をもつ。よって、共振器の性能は、エネルギーをどれだけ長い間とどめて置けるか、で測られる。それを表すために、無次元量の Q 値Qを以下のように定義する。

$$Q \equiv 2\pi \times \frac{\text{たまっているエネルギー}}{\text{1 周期で失うエネルギー}} = 2\pi \times \frac{\text{たまっているエネルギー}}{\text{単位時間あたりに失うエネルギー}/f}$$

$$= \omega \times \frac{\text{たまっているエネルギー}}{\text{単位時間あたりに失うエネルギー}}$$

ここで、たまっているエネルギーをUと書くと、単位時間あたりに失うエネルギー$-\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$は

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \Gamma U$$

と書ける。ここでγは時間的な減衰レートを表す減衰定数で、振動の寿命τをとすると

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

の関係がある。これらを用いて Q 値を書き直すと

$$Q = \omega \frac{U}{-\mathrm{d}U/\mathrm{d}t} = \omega \frac{U}{\Gamma U} = \frac{\omega}{\Gamma}$$

となる。ここで、共振器（のモード）の共鳴角周波数を複素数に拡張することを考えよう。その複素角周波数を$\tilde{\omega} = \omega + \mathrm{i}\gamma$とすると、この共振モードの電場は、

$$E = E_0 e^{i\tilde{\omega}t} = E_0 e^{i(\omega + i\gamma)t} = E_0 e^{i\omega t} e^{-\gamma t}$$

となって、減衰する様子を表すことができる。強度（エネルギー）は絶対値の 2 乗だったことを思い出せば

$$U = |E|^2 = E_0^2 e^{-2\gamma t}$$

と書けて、U に対するレート方程式との対応を考えれば

$$2\gamma = \Gamma$$

の関係を得る。最後に、Q 値を複素固有周波数で表すと

$$Q = \frac{\omega}{\Gamma} = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\mathrm{Re}(\tilde{\omega})}{2\mathrm{Im}(\tilde{\omega})} = \frac{\mathrm{Re}(\tilde{f})}{2\mathrm{Im}(\tilde{f})}$$

のように、Q 値を計算することができる。これは、後に数値計算で固有周波数を計算した際、そこから Q 値を計算する際に使える便利な式である。

数値計算では、上に示したように複素固有周波数を計算することで、Q 値を計算できるが、実際の実験では、スペクトル測定からQ値を計算する。詳細は省くが、ローレンツ型の共鳴をもつ共鳴スペクトル（ローレンツモデルで出てきた関数の虚部のような、とがった山のような形）が得られた時、Q 値は

$$Q = \frac{\text{共鳴周波数}}{\text{半値全幅（周波数幅）}} = \frac{\text{共鳴波長}}{\text{半値全幅（波長幅）}}$$

によって計算できる。つまり、山のとがっているところの周波数（波長）を、その山の半値全幅で割ればいい。このようにして、計算（シミュレーション）・実験で、共振のQ値を求めることができる。直感的な理解を述べておくと、スペクトル幅（周波数幅）と寿命（時間幅）はフーリエ変換の関係（片方が狭い幅を持つとき、もう片方は広い幅をもつ）にあるため、寿命の逆数である減衰定数は、スペクトル幅に比例するのである。ローレンツ型の共鳴の場合は、$2\gamma = \Delta\omega$の関係が成立するため、上の式のようになる。

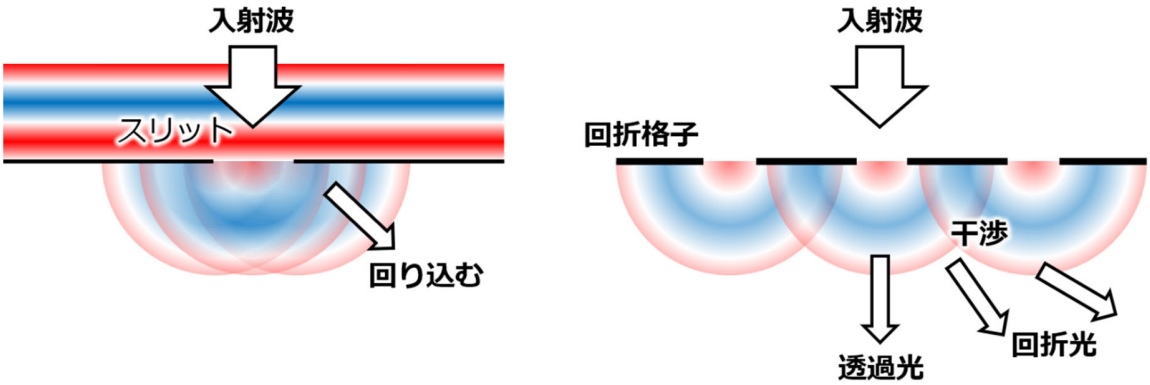
また、Q値の定義を見てもらうと、Q値の逆数は「規格化されたエネルギー損失」に対応することが分かる。従って、共振器において、損失の原因が複数ある場合、それを分離してL_1, L_2のように書けば

$$L_{\text{total}} = L_1 + L_2 + \cdots = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \cdots = \frac{1}{Q_{\text{total}}}$$

のように、各損失と、全てを考慮したときのQ値の関係を書くことができる。

光の回折と回折格子

さて、透過・反射・干渉の長い旅路を経て、回折までたどり着いた。回折（diffraction）とは、光がモノの後ろに「回り込む」現象である。これを理解するには、ホイヘンスの原理の助けを借りるとよい。波長と同程度の大きさのスリットに平面波を入射する。すると、図のようにスリットから円形波が伝搬し、スリットの「うしろ」に回り込む。このような現象は、水面等の方がよく見たことがあるかもしれない。回折は原理的には、あらゆる大きさのスリット（窓）で生じている。しかし、図のように、障害物が「波長程度」のサイズである場合に、その効果はより顕著になる。



続いて、回折を利用した光学素子である、回折格子復習しよう。回折格子は、様々な種類があるが、基本的な原理としては、先ほどのスリットがたくさん並んでいると考えればよい。各スリットから出てくる球面波が遠方で干渉しあう。波が強め合う干渉条件は、「光路差」＝「波長の整数倍」なので、式としては

$$a \sin \theta_D = \pm m\lambda$$

と書ける。ここで、aは回折格子の周期（格子定数）、θ_Dは回折角、mは「次数」、λは波長である。この条件を満たす角度「回折角θ_D」に回折光が現れ、「次数」によって、±1 次、±２次などと呼ぶ。回折は一般に透過光を挟んだ反対にも出射され、通常、回折格子の回折効率（入射波のどれくらいの割合が回折光になるか）は高くなく、ほとんどの光は透過する。また、次数が上がるほど回折効率は下がる傾向にある。

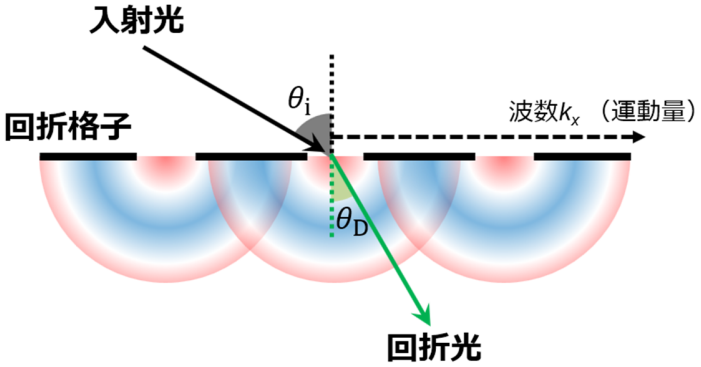
例によって、回折格子による回折光を運動量の保存で考えてみよう。スネルの法則などで考えてきた系はx方向に完全に不変な系であったが、回折格子の場合は完全に不変ではない。しかし、x方向に周期的であることによって、この運動量の考え方がうまく機能する。とにもかくにも、式を見てみよう。入射光が回折格子に入射角θ_{i}で入射し、回折角θ_{D}に回折光が生じたとする。この時、x方向の運動量の保存は

$$k_0 \sin \theta_{\mathrm{i}} \pm m\frac{2\pi}{a} = k_0 \sin \theta_{\mathrm{D}}$$

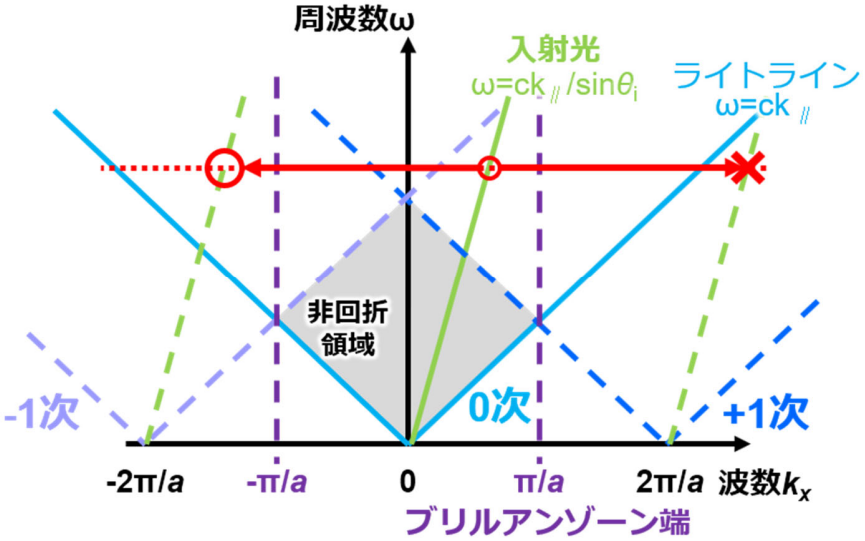
と書ける。x成分の波数が sin を使って書けるのはここまで学んできたとおりである。問題は左辺第２項だろう。これは、波長λの代わりに回折格子の周期aを使った「波数」のような量である。固体物理ではこれを逆格子ベクトルと呼んでいる。この式はつまるところ、「入射光は、回折格子から逆格子ベクトルの整数倍だけ運動量を授受した結果、回折される」ということを意味している。この式が本当に成り立つのか、試しに$\theta_{\mathrm{i}} = 0°$（垂直入射）を入れて確かめてみよう。

$$\frac{2\pi}{\lambda}\sin 0° \pm m\frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_{\mathrm{D}}$$
$$\leftrightarrow \pm m\frac{1}{a} = \frac{1}{\lambda}\sin\theta_{\mathrm{D}}$$
$$\leftrightarrow \pm m\lambda = a\sin\theta_{\mathrm{D}}$$

となり、確かに先ほどの式と一致する。



もしかしたら納得がいかないかもしれない。過度に難しく考える必要はない。実際に起きていることはあくまで、「回折格子において生じた回折が干渉しあって回折光が生じる」という現象である。それを、x方向の並進対称性から運動量の保存という観点で整理してみると、逆格子ベクトルという量を導入することで、回折格子がもつ空間的な周期構造に由来する運動量を授受している、と解釈してもよい。この考え方はこの後述べるように、分散関係（バンド図）で回折を考えるときに便利である。回折格子でおきていることは、結晶のバンドで登場する第一部ブリルアンゾーン端における「折り返し」と同じであることがわかるだろう。（ここでは、ブリルアンゾーンについて、よくわかっていなくても構わない。フォトニック結晶のところで、慣れよう）

図は、回折格子による回折を分散関係上で表現したものである。原点からのびるライトラインがあり、その内側に入射光を表す直線がある。回折格子は、入射波数に逆格子ベクトルの整数倍を足し引きする機能があるのだった。それを表現したのが左右にあるライトラインである。ここでは、±1 次のみ描いたが、実際には左右に無限に繰り返されている。今、赤線で示した周波数の光を、角度θ_{i}で回折格子に入射したとしよう。この入射光がもつ波数は、回折格子から運動量を授受することで、赤矢印で示した点へ移ることができる。しかし、右方向へ移った点はライトラインの外側のため、自由空間を伝搬できない。一方、左方向へ移った点はライトラインの内側にあるため、自由空間を伝搬できる。結果として、この場合、-1 次の回折光のみが、回折光として現れる。このように、実際には、入射光の波長と回折格子の周期によって

許される（観測される）回折次数は制限を受ける。分散関係の図を用いると、この制限を視覚的に理解することができる。また、0 次、±1 次のライトラインで囲われたグレーの領域では、どのような周波数・入射角でも回折が生じないため、「非回折領域」と呼ぶ。