

## 2 物質と光

### 屈折率

屈折率 $n$ は、古典的には、自由空間での電磁波の速度 $c$ と物質中の速度 $v$ の比で以下のように定義される。

$$n \equiv c/v$$

つまり、屈折率が大きい場合、電磁波の速度は遅くなる。ここで屈折率 $n$ の物質中の電磁波の周波数と波長の関係は

$$\omega = vk = \frac{c}{n}k$$

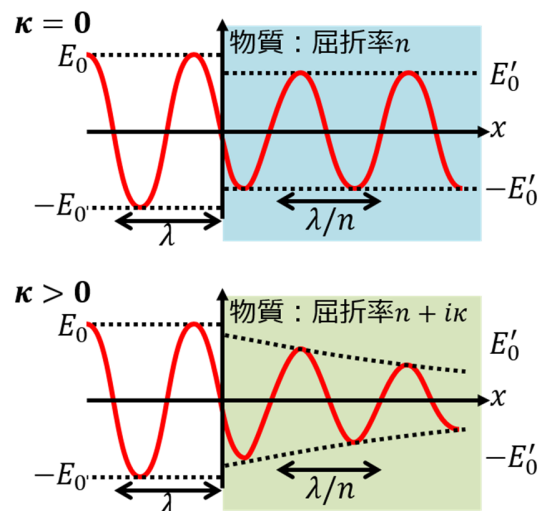
となる。ここで自由空間中の波数を $k_0 = \omega/c$ とすると

$$\omega = \frac{c}{n}k \leftrightarrow k = \frac{\omega n}{c} = nk_0$$

と書け、物質中では、自由空間に比べ屈折率 $n$ 倍波数が大きくなる。これを前述の電磁場の式（電場の方）に代入すると

$$E = E_0 \exp[i(kx - \omega t + \delta)] = E'_0 \exp[i(nk_0 x - \omega t + \delta)]$$

ここで $E'_0$ は物質内での電場振幅である。上式の様子を示したのが下図である。波数が $n$ 倍されたため、自由空間から見た時、波長としては逆に $1/n$ 倍短くなっている。また、電磁波が物質に入射する際に、一般には反射があるため、振幅が小さくなる。 $(E_0 > E'_0)$



ここまで考えてきたような、物質にまったく吸収がない場合は、単純に屈折率 $n$ だけで現象を説明できる。しかし、一般に物質には吸収が存在し、その場合は上図のように、物質中で電磁波は減衰する。実は屈折率を複素数にすることで、この減衰を表現することができる。ここ

更新日：2023/5/31

ナノフォトリクスゼミ 森竹勇斗

で、屈折率虚部として消衰係数 $\kappa$ （読み方：カップパー）(extinction coefficient)を使用して、複素屈折率(Complex refractive index) $N$ を

$$N \equiv n + i\kappa$$

と定義する。

前述の電磁場の電場の式を書き直すと

$$E = E'_0 \exp[i(Nk_0x - \omega t + \delta)] = E'_0 \exp[-\kappa k_0x] \exp[i(nk_0x - \omega t + \delta)]$$

となる。消衰係数の項は、虚数に虚数単位がかかるため、負の符号がつき、もはや振動を表す項ではなくなるため、前にくくりだした。上式からわかるように、屈折率に虚部を入れたことによって、指数関数的に減衰する項が現れた。一方、波長自体はさきほどと変わらない。これで、物質内での減衰を表すことができるようになった。当然だが、屈折率虚部の符号が反転すれば、指数関数的に増幅することになり、これは利得のある場合になる。ここで、前述した、波の位相の符号の定義と屈折率虚部の符号の問題に気づくだろう。波の位相をどうとるかによって、屈折率虚部（消衰係数）の符号の正負が表す物理的状況（損失か利得か）がかわってしまう。

ここで上式の電場強度（絶対値の二乗） $I = |E|^2 = E \times E^*$ は、

$$I = |E'_0 \exp[-\kappa k_0x]|^2 = |E'_0|^2 \exp[-2\kappa k_0x]$$

となり、

$$\begin{aligned} I_0 &= |E'_0|^2 \\ \alpha &= 2\kappa k_0 \end{aligned}$$

とおいて書き直すと、

$$I = I_0 \exp[-\alpha x]$$

となる。（このように、電磁場が物質内で指数関数的に減少することを表す式をベールの法則(Beer's law)というらしいがあまりそう呼んでいるのを聞いたことがない) ここで、 $x$ は物質表面からの距離を表す。さらに $\alpha$ は吸収係数(Absorption coefficient)（消衰係数と混同しないように！）と呼ばれ、減衰の強さを表す。また、電場強度が $1/e$ まで減衰する距離は $\alpha x = 1$ から求められ

$$d_p \equiv 1/\alpha$$

となる。これを侵入長、または侵入深さ (penetration depth)（「進入」を使っている教科書もあるが、「侵入」のほうが意味的にも正しいと思う）

## 分散関係

ここでやや唐突だが、分散関係(dispersion relation)について触れておこう。分散関係の図の見方や考え方を知っておくことは、これ以降の様々な光学現象を理解するのに役立つ。

分散関係とは、周波数と波数の関係を表したものであり、真空中では

$$\omega = ck$$

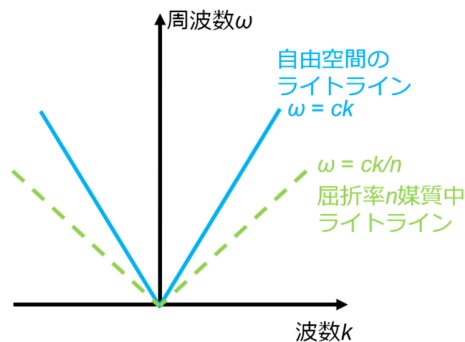
であり、すでに登場した式である。これは、光速（速度）によって、空間の特征量である波数と、時間の特征量である周波数が結びついたものであった。つまり、自由空間（真空のこと）を伝播する光の波数（波長）と周波数は独立ではなく、どちらか一方が決まるともう片方も自動的に決まる。それゆえ分散「関係」という名前がついているのだろう。真空中では、上記のように単純な式で書けるが、一般に様々な物質中では、周波数と波数はもっと複雑な式で結びついている。したがって、もっと一般化して

$$\omega = f(k)$$

のように、 $\omega$ を $k$ の関数として表したものは全て分散関係と呼ぶ。例えば、屈折率 $n$ の物質中を伝播する光の分散関係を考えよう。実はこの式もすでに登場していて

$$\omega = \frac{c}{n}k$$

である。この関数を図にしたものが下図である。



分散関係は、図のように、横軸に波数、縦軸に周波数を取って図示することが多い。ここでは、自由空間および物質中を伝播する光の分散関係を描いており、当然グラフは速度の傾きをもった直線になる。先に述べたように、屈折率 $n$ の物質中では光は遅くなるため、傾きが小さくなる（ただし、屈折率が1より小さい場合はこの限りではない）。このような、均質媒質中の電磁波の分散関係は、ライトライン(light line)と呼ばれる。（波数が二次元の場合、ライトコーン(light cone、光円錐)とも呼ばれる）空気のライトライン、ガラスのライトライン、などと呼んだりする。

更新日：2023/5/31

ナノフォトニクスゼミ 森竹勇斗

注意深い人はここで、屈折率が複素数の場合どうなるのだろう、と思ったかもしれない。上記の式は、複素数の場合でも成り立つ。ここで示した図は、実数の波数に対して、周波数の実部をプロットしていることになる。

ちなみに「分散」という言葉は後に扱う誘電関数のところでも出てくる。分散は dispersion を和訳した言葉だと思う。「分散がある」という言葉は「周波数依存性をもつ」と言い換えられる。歴史的には、1666年にニュートンが白色光をプリズムに入れると光が色に分かれて出てくる（分散してでてくる）ことを発見し、後にそれが、プリズムの屈折率の波長（周波数）依存性によって引き起こされていることがわかった。そのため、分散＝周波数依存性がある、という意味で使われているのだと思う。また、ここででてきた「分散関係」は、自由空間では  $\omega = ck$  となって（位相）速度は周波数（波長）に依存しないが、物質中では速度は  $c/n(\omega)$  となって（屈折率を介して）周波数に依存する。そのため、周波数に依存した周波数と波数の関係→分散関係と呼ばれている。

### 屈折率の起源

ここまで電磁波に対する物質の性質を、「屈折率」で表現してきた。しかし、そもそも屈折率とは何が起源で、どう決まっているのだろうか？そこで、光が、電場と磁場の波であることを思いだそう。つまり、物質に光を当てる、とは、物質に電場と磁場をかける、のと同じなのだ。そこでまず、電場を印加した時の物質の反応から考えていく。一般に、物質に電場を印加すると、（電気）分極が誘起される。（このような物質を誘電体と呼ぶ）。単純には、物質内部の分極（電氣的な応答）の大きさは、印加する電場にもなって強くなるから、その応答の大きさ表す物理量を誘電率  $\epsilon$ （イプシロン）と呼ぶことにする。これの磁場 ver.も同じように考えることができ、物質に磁場を印加したときにできる磁化（磁氣的な応答）の大きさを表す透磁率  $\mu$ （ミュー）がある。さて、実は、この誘電率と透磁率を用いて、屈折率は

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}$$

と書ける。電磁波に対する物質の応答である屈折率が、電気と磁気に対する応答で書けるのは、直感的にもとても自然だ。

始めに、光を入れることと電磁場を印加することは同じだ、と乱暴に言ったわけだが、よく考えると、そんなに単純ではない。なぜかというと、光の電磁場は、ものすごい高周波の電磁場だからだ。具体的に言うと、光（可視～近赤外）の非常に早い周波数に対して、電場に対す

る応答を決める電子は十分にそのスピードについていけないが、磁場に対する応答を決めるスピンは追従できない。つまり、光領域では、 $\mu$ はほとんどの場合1（磁化はゼロ）としていたため、屈折率は

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

のように誘電率のみによって決まる。光領域においては、物質は電磁波の「電場」に対して応答している。（当然扱う周波数域がかわればこの状況も変わる）光の教科書で、電磁波を電場の振幅で表現するのはこういった事情による。

ここまでの議論で実は少し嘘があった。上述の誘電率・透磁率は、実は「比」誘電率と「比」透磁率である。比誘電率（比透磁率）とは、ある物質の誘電率（透磁率）を真空の誘電率（透磁率）で割ったものであり、物理的次元は無次元（単位がない）である。一方、誘電率（透磁率）は物理的な単位をもつ量である。比誘電率（比透磁率）を用いると真空（空気）の場合は1となり、そこからのずれとして物質を記述できるため便利である。そのため、ほとんどの場合、比誘電率（比透磁率）が用いられることが多く、論文などでもわざわざ「比(relative)」をつけずに、単に「誘電率(permittivity)、透磁率(permeability)」と書いて、実際は比誘電率・比透磁率を指している場合が多い。

## 分極

ここまでで、光領域では、屈折率が誘電率のみから決定されることを述べた。ではここで、誘電率を決める「分極」について少し、その物理的実体を掘り下げておこう。これは、のちに紹介するメタマテリアルのアイデアにもつながっていく。物質に電場を印加すると、物質の内にある電荷は、クーロン力によって、それぞれの電荷の符号に合わせた向きの力を受ける。その結果、生じる電荷の偏りを、分極と呼ぶ。が、この「偏り方」=分極の「起源」は、材料によって様々である。具体的には、材料の化学結合が大きく関わっていて、例えば、半導体材料のような結晶では「電子分極」がよくあらわれる。また、イオン結晶では、「原子分極（イオン分極）」が、水分子のような配向分子では、「配向分極」が起こる。



更新日：2023/5/31

ナノフォトニクスゼミ 森竹勇斗

分極では、電荷の偏りによって、図のような電荷の対、「電気双極子」が形成される。（ここで、一般の電荷分布は、双極子、四重極子・・・といった双極子の基底で多重極子展開できる。つまり、一般に分極は、双極子成分以外も持っているが、光応答を考える場合は双極子のみを考えることが多い。これは、対称性から、高次極子が励起不可であるためである）ここで、双極子モーメントと呼ばれる量が

$$\mu = qd$$

と表現される。ややこしいことに、双極子モーメントは、透磁率と同じ $\mu$ で書かれることが多い。双極子モーメントは、ベクトル量であり、負電荷から正電荷へ向かう向きをもっている（電気力線の向くとは逆になる）。物質中の分極 $P$ は単位体積中の双極子モーメントの和なので、

$$P = \sum_i \mu_i$$

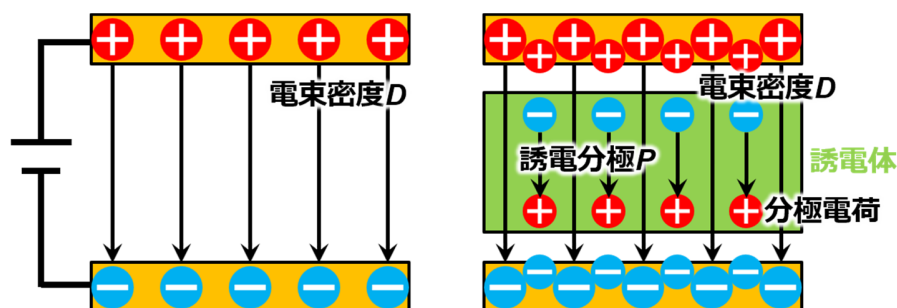
と表される。

### 誘電率

ここでは分極と誘電率との関係を定式化するために、コンデンサを考える。誘電率とは、物質の電気的な刺激に対する応答を表すものの比例係数であった。まず、電束密度（電気変位とも呼ばれる） $D$ について考えよう。電束密度とは、その名の通り電束の密度なのだが、マクスウェル方程式のガウスの法則からのわかるように（単位面積当たりの）電荷密度の次元をもつ物理量である。（単位は  $C/m^2$ ）図のようなコンデンサを考えた時、電束密度 $D$ は平行平板にたまった電荷の表面電荷密度に対応する。図のようにこの電荷の密度が、矢印で書かれた電束密度と一致する。コンデンサ内が真空の場合、 $D$ と電場 $E$ との関係は真空の誘電率 $\epsilon_0$ を用いて

$$D = \epsilon_0 E$$

と書ける。



次に、コンデンサ内に誘電率 $\epsilon$ の誘電体が挿入された場合を考える。このとき先ほどの式は

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

と書ける。コンデンサの電場  $\mathbf{E}$  によって、誘電体内に分極が生じ、微小な電気双極子が形成される。誘電体内部では、分極により発生した正電荷と負電荷が打ち消し合って電氣的に中性になる一方、誘電体表面には、負電荷（上面）と正電荷（下面）が残る。これを分極電荷と呼ぶ。分極電荷は、もともとあった電場と逆向きの反電場を作るので、分極によって、コンデンサ内の電場は減少する。（一方で、電束密度（電荷密度）は、真空の時に比べ分極電荷分増える。つまり、誘電体を挿入するとコンデンサの静電容量が増える）これを式で書くと

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

となる。ふたつの式を連立して

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

となる。分極が電場の大きさに比例しているとすれば、電気感受率  $\chi$  を用いて

$$\varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$$

つまり、誘電率  $\varepsilon$  は

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$$

と書ける。また、一般に誘電率と呼んだ時に意味する比誘電率  $\varepsilon_r$  は

$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

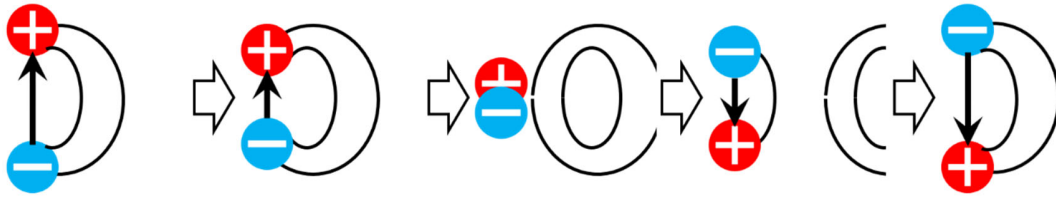
となる。

## 双極子放射

前節では、分極と誘電率がどのように結びついているのかを述べたが、静的な場合（時間的な変化を考えない場合）を想定していた。一方、この双極子が時間的に振動する場合は「放射」が起こる。つまりエネルギーが伝播光として放出される。一般に、放射は電荷が「加速度」運動することによって発生する。振動双極子では、正負の電荷が、単振動（円運動の1次元射影）するので、加速度運動している。よって、光が放射される。双極子からの放射は、そのまま、「双極子放射（dipole radiation）」と呼ばれる。その様子は↓動画がわかりやすい。

<http://www.takuichi.net/hobby/edu/em/smalldipole/smalldipole-j.html>

図のように、双極子を構成する電荷をつなぐ電気力線が、時間的に「外側に押し出され」、放射されていく。



ここで、双極子放射がもつ性質について述べておく。まず放射場は、双極子と垂直方向に放射され、双極子の上下方向には放射されない。また、放射場の角度分布を、三次元空間に図示すると、いわゆるドーナツ型になる。双極子に垂直な方向に強く、角度がつくにつれ放射は弱くなっていく。さらに、放射場の双極子位置での位相は、双極子振動の位相と一致する。これは、加速度が電荷位置の二階微分だからである。

ここまでの議論を総合すると、光が物質中で「遅くなる」理由がわかってくる。おおざっぱに言うと、分極が大きいほど誘電率も大きくなり、屈折率も大きくなる。屈折率のところで述べたように、最も古典的には、屈折率は、光がどの程度「遅くなるか」を表しているのであった。つまり、より大きな分極が生じる物質では、より光が遅くなる。これは、光が分極を誘起し、分極（双極子）から光が放射され、さらにその放射場が分極を誘起し・・・といった具体的な物理プロセスを想像すると、確かに、分極が大きければ大きいほど、光がなかなか前にすすめないイメージがわいてくる。光が物質に入ると、電子や原子と握手（分極）をしながら前に進むわけだが、分極が大きい物質ではたくさんの握手を求められ、なかなか先に進ませてくれないのだ。

### 複素誘電率と複素屈折率

さて、複素屈折率についても、複素誘電率を用いて

$$N = \sqrt{\tilde{\epsilon}}$$

の関係が成り立つ。(透磁率を含めても問題ない) ここで、複素誘電率を

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon' + i\epsilon''$$

と書くと、複素屈折率との関係は

$$\begin{aligned}\epsilon' &= n^2 - k^2 \\ \epsilon'' &= 2nk\end{aligned}$$

と書ける。屈折率虚部がない場合は、誘電率虚部も同様にゼロになる（逆もしかり）ため、誘電率の虚部も損失（または増幅）を表している。また、屈折率虚部が実部よりも大きくなる場



合、誘電率実部は負になり得ることもわかる。この状況は、金属（後にドルーデモデルで扱う）の場合に相当する。

## 誘電関数

ここまで、誘電率 $\epsilon$ は、何らかの値を持つ「定数」として考えてきたが、現実の材料の誘電率（や透磁率、屈折率）は光の周波数 $\omega$ （波長）に依存する。そのような周波数依存性（周波数分散）を考えると、特に誘電関数（dielectric function）という呼び方を用いる。以下では、光が物質に入射されたときの物質内部の電子（キャリア）の運動を古典的にモデル化したローレンツモデルとドルーデモデルについて説明する。これらのモデルはバネにつながれた振動子の運動方程式であるが、驚くべきことに、このような単純な（初等的な）モデルで現実の物質における現象が非常によく説明できる。物理は近似だけであるが、その近似の面白さを感じられるよい例だと思う。

## ローレンツモデル

ローレンツ（Lorentz）モデルは、分極（電気双極子）の正電荷と負電荷がばねに繋がれて振動していると仮定して導かれる古典的なモデルであるが、ほとんどの材料の誘電率（透磁率）をよく説明できる。物質に光が入射すると、光電場によって電子が駆動される。ここで、原子核も帯電しているので、電場によって力を受けるはずだが、電子に比べるとかなり質量が重いので、電子の運動の方がはるかに大きく、物性への寄与が大きい。この時、電子の運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - eE_0 \exp(i\omega t)$$

と書ける。（ここでは簡単のため、（粘性）抵抗は考えないでおこう）右辺第一項は、バネによる復元力（フックの法則）を表している。バネ定数 $K$ は、質量と共生振動の周波数を使って書き直せる。また、右辺第二項は光電場によるクーロン力を表している。これが、電子を揺さぶる励振源である。励振源は今、入射光の周波数で振動しているので、それにより駆動される電子の位置もまた、振動することが期待される。これを、調和振動解と言ったりする。そこで  $x = x_0 \exp(i\omega t)$  を代入すると

$$m(i\omega)^2 x_0 \exp(i\omega t) = -m\omega_0^2 x_0 \exp(i\omega t) - eE_0 \exp(i\omega t)$$

振動部分は共通なので、落としてしまうと

$$-m\omega^2 x_0 = -m\omega_0^2 x_0 - eE_0$$

更新日：2023/5/31

ナノフォトリクスゼミ 森竹勇斗

これを $x$ について解いてあげれば

$$x_0 = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

となる。分極 $P$ は、電子密度を $N_e$ と書くと、 $P = N_e \times -ex$ と書けるので、光電場によって形成される分極の情報は、 $x_0$ を見ればわかる。ということで、 $x_0$ について少し見てみると、この関数は入射光の周波数が、分極のバネの固有周波数に一致するところで発散し（周波数の大小どちらから近づけるかで極限值が異なる。このようなことは、現実には起こらない）、それ以外では減衰する。このような共鳴的な振る舞いが、ローレンツモデルの特徴である。共鳴周波数で分極が大きくなる、という直感的なことをローレンツモデルは定量的に求めている。

さて、ここまでの式では抵抗に相当する項を考えてこなかった。しかし、現実の材料では、抵抗（損失）がゼロ、ということはない（後で出てくるクラマース・クローニツヒの法則からもわかる）。したがって、先ほどの運動方程式を修正しよう。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - m\gamma \frac{dx}{dt} - eE_0 \exp(i\omega t)$$

ここで、新たに加わった、右辺第二項、速度に比例する項が抵抗を表す項であり、その比例定数 $\gamma$ が減衰係数と呼ばれる。減衰定数は、電子の寿命（平均自由行程とフェルミ速度から求められる緩和時間）の逆数である。この運動方程式から、先ほどと同じように $x_0$ を求めると

$$x_0 = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

となり、これが、多くの教科書でよく見るローレンツモデルの式である。この式を見ると、先ほどと異なり、 $x_0$ が複素数になっていることがわかる。つまり、抵抗があることによって、分極の位相が入射光電場に対して遅れることを意味している。また、減衰定数の存在によって、この関数は共鳴周波数においても発散せず、非物理的な現象は起こらない。

この式と $P = N_e \times -ex$ と誘電率の式（ $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi) = \varepsilon_0(1 + P/\varepsilon_0 E)$ ）を用いると、ローレンツモデルによる誘電率は

$$\varepsilon = 1 + \frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

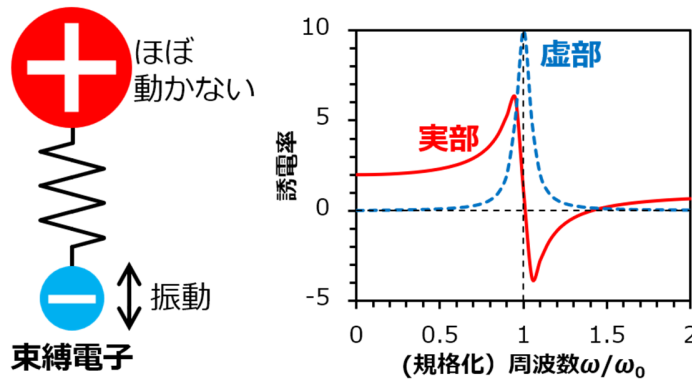
となる。この式を有理化して、実部と虚部にわけると

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 1 + \frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \varepsilon'' &= \frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned}$$

となる。これらの概形をプロットしたのが図である。ここでは

$$\frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m} = 1, \omega_0 = 1, \gamma = 0.1$$

と置いている。



ここで、上の式について、少し掘り下げよう。ローレンツモデルの誘電率における、分極（双極子）の寄与、つまり実部の第2項と虚部の関数の概形に着目する。実部は、共鳴条件近傍で、振幅が正から負に大きく変化し、虚部は山形になる。このような形状を分散型と呼ぶ（ちなみに、虚部の形状を微分すると、実部の形状になる、という関係がある）。共鳴条件である、 $\omega = \omega_0$ では、実部がゼロになり純虚数になる。つまり、共鳴状態では、誘起される双極子は、入射電場に対して位相がちょうど90度ずれる。また、虚部の関数形は、 $\omega = \omega_0$ で頂点になるような山の形をしており、共鳴条件で吸収がもっとも大きくなる。一方、 $\omega \ll \omega_0$ では、実部が正、虚部がほぼゼロ、また $\omega \gg \omega_0$ では、実部が負、虚部がほぼゼロになる。つまり、 $\omega$ が小さい時は位相差がほぼゼロ（同位相）、 $\omega$ が大きい時は位相差が180度（逆位相）になるということである。（この位相差の違いから、物質内における（疑似的な）超光速状態・スローライトや、自由端・固定端反射等が説明できる。これらの話は、このゼミでは扱わないが、「分光エリプソメトリ第5章 5.2.2」に（少し長いが）詳しく書いてあるので、是非一度読んでみてほしい）

ローレンツモデルの式を見てみると、全てのパラメータが物理的な意味を持っている。そのため、現実の材料の誘電率を測定し、ローレンツモデルでフィッティングすることで、材料の物性特性を得ることができる。逆に、物性特性を全て知っていれば、誘電率を知ることができる。

更新日：2023/5/31

ナノフォトリクスゼミ 森竹勇斗

現実の材料の誘電率は、複数の共鳴周波数の異なるローレンツモデルで、表現される。様々な周波数帯の様々な起源の分極を、このローレンツモデルだけでよく再現することができる。

$$\varepsilon = 1 + \sum_j \frac{A_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) + i\gamma_j\omega}$$

ここで、 $A_j$ は比例定数をひとまとめにしたもので、振動子強度 (oscillator strength) と呼ばれる。

ちなみに、調和振動解を求めるときに、 $\exp(i\omega t)$ を使うか、 $\exp(-i\omega t)$ を使うかで、誘電率 (屈折率) 虚部の符号が変わる。これは、先に既に述べた通りであり、一貫した定義を採用する必要がある。

### ドルーデモデル

ローレンツモデルでは、正負の電荷がバネで繋がれ強制振動する様子をモデル化したが、金属中の自由電子のように、束縛されていない電子をモデル化したのがドルーデ (Drude) モデルである。ドルーデモデルは、金属の誘電率を説明するモデルとしてよく説明されるが、半導体中にドーピングされたフリーキャリア (電荷の符号や、粒子の種類を問わない) の表現にも用いることができる。フリーキャリアがあれば大抵、電気的な分類としては導体であることが多いので、導体の誘電率を説明するモデル、と言ってもいい。(一方、ローレンツモデルは、絶縁体や半導体の誘電率をよく説明する)

ローレンツモデルの時と同じように、運動方程式を立てよう。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\gamma \frac{dx}{dt} - eE_0 \exp(i\omega t)$$

見てすぐにわかるように、ローレンツモデルから、単に復元力の項がなくなっただけである。

これを例によって、 $x$ について解くと

$$x_0 = -\frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - i\gamma\omega}$$

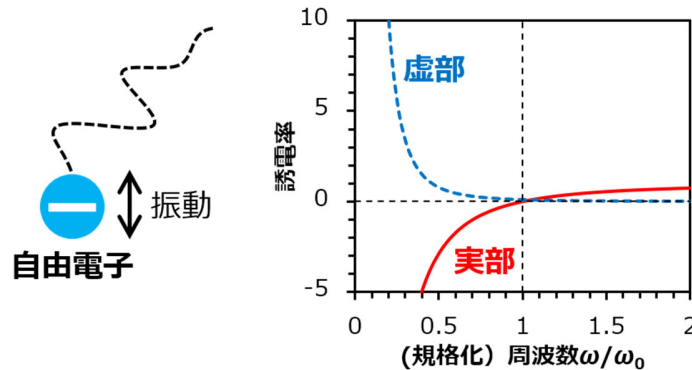
となり、誘電率は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_\infty \left( 1 - \frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - i\gamma\omega} \right) = \varepsilon_\infty \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} \right) \\ \varepsilon' &= \varepsilon_\infty \left( 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2} \right) \\ \varepsilon'' &= \varepsilon_\infty \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned}$$

と書ける。概形をプロットしたのが図である。ここでは

$$\varepsilon_{\infty} = 1, \omega_p = 1, \gamma = 0.1$$

と置いている。ここで $\varepsilon_{\infty}$ は、周波数が大きい時の誘電率の値である。また $\omega_p$ はプラズマ周波数と言って、(減衰定数がゼロの時に) 実部がちょうどゼロになる周波数を表している。この周波数を境に、誘電率の正負が変わる。誘電率が負の場合を金属的、正の場合を誘電体的と考えるので、この周波数を境に光学特性(伝導特性)が変化する。



ここで、ローレンツモデルの時と同じように、実部と虚部からわかる性質を見ていこう。まず実部は、プラズマ周波数を境に、正負が切り替わる。誘電率が負というのは、分極が入射電場に対して逆向きになることを意味している。その結果、入射した光電場は、電子が作る反電場によって遮蔽されてしまい、物質内部に光が進入できない(電場がゼロになってしまう)。これが金属の反射率が非常に高い理由であり、金属光沢は自由電子によって引き起こされている。ただし、現実の金属は誘電率虚部があるため、わずかだが光(電場)が物質中に浸みこむ。この距離を侵入長(penetration depth)と呼ぶ。プラズマ周波数よりも低い周波数において、虚部が大きな値を取る領域では、フリーキャリアによる吸収を意味している。金属であっても、より高い周波数(短い波長)の光に対しては、自由電子が光電場に追従できずに、通常の誘電体同様に光が進入できる。

### クラマース・クローニツヒの関係

ここで、屈折率(や誘電率・透磁率)の実部と虚部の関係について重要な「クラマース・クローニツヒの関係(Kramers-Kronig relation)」というものを紹介しておこう。これは大雑把に言うと、「現実の物質の光学定数の実部と虚部は、因果律によって、互いに独立ではなく関係している」というものである。ここでは詳細には立ち入らないが、例えば、屈折率実部の周波数依存性(周波数分散)が「すべての」周波数でわかっているならば、それをを用いて虚部を計

更新日 : 2023/5/31

ナノフォトニクスゼミ 森竹勇斗

算することができる。(逆もしかり) 実際には、「すべて」の周波数応答がわかることはないの  
で、何らかの仮定を入れて計算することになるのだが、実際にこの方法を用いると、吸収スペ  
クトルの周波数依存性(吸収はおもに虚部を表している)から実部を計算することができる。  
運動方程式のような因果律を破らないものからスタートしているドルーデモデルやローレンツ  
モデルは、当然この関係を満たしている。ナノフォトニクスで、いろいろと数値計算を回すと  
きに、仮想的な複素光学定数を仮定して計算をすることがあるが、場合によっては、この関係  
を破るような材料を仮定してしまう可能性があることに注意しておこう。